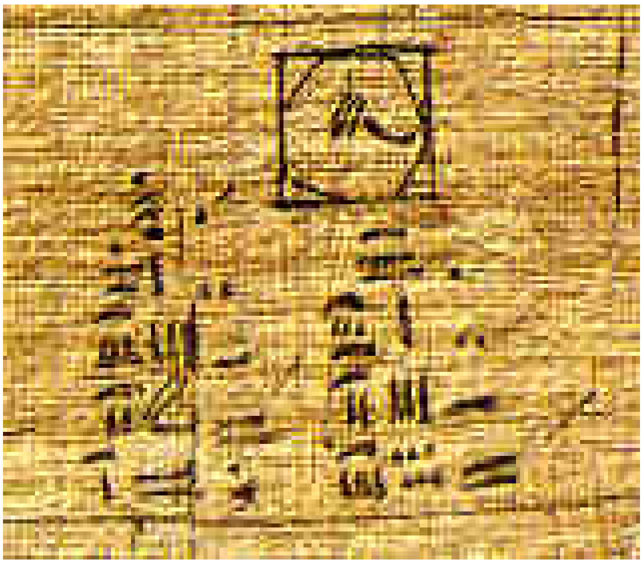
A Rhind Matematikai Papirusz 48-as feladata, IV. fejezet

Az RMP feladatainak sorában ez az egyik legérdekesebb példa. Valójában csonka, szöveg nélküli levezetés, ahol csak a mellékelt ábra, valamint az alatta látható számoszlopok tanúskodnak tanárunk szándékáról. Úgy is mondhatnánk, hogy szabad a gazda, ebben a példában mindenki azt láthat, amit látni akar. Természetesen a szakirodalom is két kézzel ragadta meg ezt a lehetőséget, bár magyarázatuk enyhén szólva kétséges.

Érdemes részleteiben is megtekinteni a feladatot.



3. ábra. Gay Robins and Charles Shute: *The Rind Mathematical Papyrus an ancient egyptian text*, (London, 1987), Plate 15 Problems 47-8.

A. A feladat leírása

Arnold B. Chace[1] felosztása szerint az eredeti, kettétört papirusztekercs bal oldali részének közepén látható szelvény alsó hasábjába került ez a feladat. Egyébként mindez a papirusz színén található (recto → a papirusz szálai vízszintesen futnak), a hátoldala két példától eltekintve (verso: a 87-es és a 98-as) üres. A jelzett hasábban példánk felett további szöveges feladatok láthatók, számozásuk 44-47-ig terjed. A példa érdekessége, hogy a szöveg helyét tanárunk üresen hagyta, és mondanivalóját a rendelkezésére álló hely baloldalára helyezte. (A szöveget jobbról balra írták). Írásához a szokásos

[1] Chace, *The Rhind Mathematical Papyrus*, The National Council Of Theachers Of Mathematics, (Virginia 1906), 22091, Association Drive, Reston.

fekete festéket használta, másutt, a felette látható példák címsorában, de kiemeléseinél is használt piros tintával itt nem találkozunk.

1. Az *ábra*.(3.ábra) Kívülről négyszög, a közepében a 9-es szám hieratikus jele látható. A négyszögben egy 7 (!) szög rajza követhető. Tanárunk a négyszög sarkait belül levágta, így jutott ehhez az ábrához. Ha ezt szabályosan teszi, nyolcszöget kapott volna. Így a jobb oldalon ’kicsúcsosodik’ a stilizált kör, ill. nyolcszög. Kérdés, hogy mit ábrázol a belső rajz, nyolcszöget vagy kört, esetleg mindkettőt.
2. A *nyolcas szorzótábla*. Közvetlenül az előbb tárgyalt ábra alá esik. Szerkezetét tekintve ’szabályos’, menete: 1 × <u>8</u>; 2 × 1 <u>6</u>; 4 × 3 <u>2</u>; 8 × 6 <u>4</u>. (Az egyes helyértékű számok felett látható félkör/pont eredeti jelzés helyett a kérdéses számokat aláhúztuk.) A szokásos összeadás alapú kettőzést tapasztalhatjuk ebben az oszlopban. Talán némileg újdonságnak számít, hogy írnokunk az eredményt a mellé húzott ferde vonallal külön is megjelölte. Kipipálta. A továbbiakban megállapíthatjuk, hogy az 1-es és 2-es függőleges vonalai helyett pontokat használt, a négyet és nyolcat az ’n’ jelével képezte. A bal oldali oszlopban az egyes helyértékű számok fölé egy kis félkört rajzolt, a tízes helyértékű számokat viszont *eltizedelte*. Azt is mondhatnánk, hogy tízzel elosztott mindent, így pl. a 16 helyett csak 1(+)<u>6</u>-t írt le. Megjegyezzük, hogy a 6 <u>4</u> szám bal felső sarkába még egy pontot is tett.
3. A *kilences szorzótábla*. Ez a számsor már nem esik az ábra alá, magasabban is kezdte, mint a jobboldali párját, így az alsó sorok egy magasságban végződnek. Szerkezetét tekintve itt is ’szabályos vonalvezetéssel’ találkozunk, írnokunk kétszerezett. A különbséget csupán az jelenti, hogy a jobboldali sorban nem szerepel a kívánt kilences szám, így azt csak összeadás útján képezhette. Meg is jelölte mindkét összeadásra váró számot, az 1-et és a 8-at. Ez természetesen érvényes a baloldalra is, ahol a <u>9</u>-et a 7 <u>2</u>-vel kell összeadni. Az eredményt az alsó sorban külön kiemelte: 8 <u>1</u>. Megjegyezzük, hogy a kezdő kilences szám hieratikus jelét kissé elnagyolta, és a nyolcas oszlopból már ismert félkör helyett itt ponttal jelezte a *tizedelést*. A következő sorban a 18 esetében is ugyanezt tette. A harmadik, negyedik és ötödik sorban már visszatért a félkör használatához.

A számolás menete egyébként: 1 × <u>9</u>; 2 × 1 <u>8</u>; 4 × 3 <u>6</u>; 8 × 7 <u>2</u>; (=) 8 <u>1</u>.

A fentiek alapján megállapíthatjuk, hogy a négyzetbe rajzolt ábra hétszögletű, a benne látható szám 9 és nem 1/9 vagy valami más, alatta két szabályos számsort mellékelt írnokunk, aminek a végeredménye 6 <u>4</u> és 8 <u>1</u>.

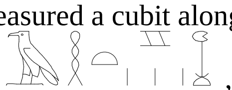
Nos, ennyi az egész. A többit mi, késői utódok tesszük hozzá.

B. A szakirodalom megállapításai, válogatás

1. Érdemes a sort August Eisenlohr[2] gondolataival kezdeni. Könyvének 117. oldalán tárgyalja ezt a példát. Jól látja, hogy a belső ábra valójában kört ábrázol: „… welches den Flächeninhalt des Kreises darstellen soll.” Téved abban, hogy a körben szereplő 9-es szám egyúttal valamilyen mértékegységet is magában hordana: „… damit andeutend, daß der Kreis einen Durchmesser von 9 (Ellen oder Ruthen) haben soll”. Megállapítja a továbbiakban, hogy négyzet területéből a beleírt kör területe kiszámítható, ha a négyzet egyik oldalának $\frac{8}{9}$-ét négyzetre emeljük. Ugyanakkor azt is megállapítja, hogy a kör területe más úton is

[2] Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter* (Papyrus Rhind des British Museum) (Leipzig, 1877), J. C. Hinrichs’ Buchhandlung.

kiszámítható: $\left(d\frac{8}{9}\right)^2$ = A. Ezzel viszont már nem boldogult, mert a körben látható 9-es átmérő esetén a kör területe 64 egység lenne, és nem $\frac{64}{81}$. Így kénytelen volt megállapítani, hogy:„… $\frac{64}{81}$ ist aber der Bruch, welcher, den Durchmesser zu 1 angenommen, den Flächeninhalt des Kreises ausdrückt.[3] Jól látta, hogy csupán 1 egység átmérőjű kör területe lehet képlete alapján $\frac{64}{81}$. (Pontosabban: $1^2 \times (8/9)^2 = 64/81$.) A feladat megítélését tekintve több helyen is téved, valamilyen konkrét példát lát maga előtt, amelynek számolásához természetesen mértékegységek is szükségesek. Eredménye így nem lehetett jó, mert a megadott nagyság, a 9, más értékhez vezet, mint a számoláshoz megadott levezetés. Eltekintett attól is, hogy a hosszmértékek szorzatakor területméreteket kapunk! Külön kitér a számok hieratikus írására, erre alapozza az *Elle* mértékegységet. (RMP 56-os; 3-as és 58-as példái). Az A=$\left(d\frac{8}{9}\right)^2$ bevezetésével közel jár a π felismeréséhez.

2. Az egyiptológia E.T. Peet[4] munkáját a klasszikus feldolgozások közé sorolja.[5] Peet kitűnően látja, hogy a mellékelt ábra a négyszög és a belerajzolt kör területének összefüggését kutatja, mégis Eisenlohrhoz hasonlóan mértékegységeket keres mögötte. „…is clearly the comparison of the area of a square of side 9 *khet* with that of a circle of diameter 9 *khet*.”[6] Csakúgy, mint Griffith, ő is a strip = csík elméletet hirdeti, azaz szerinte a számolásnál használt értékek mindegyike már önmagában is valamilyen területegységnek felelne meg. Ezeket külön-külön egy négyzet *khet*nek nevezte el. Számolási menetét itt részleteiben nem elemezzük, bennünket ez csupán annyiban érint, hogy ezzel a hieratikus tizedelős írásmódra keres választ. Bevezeti az „a thousand-of-land” fogalmat. „Each of these strips was called a cubit-of-land, because it measured a cubit along one side of the square *khet*, and a thousand of these, known technically as  „a thousand-of-land,” would make ten square khet, which…”[7] Részben egyetérthetünk vele, mert korábbi olvasatunkban[8] az MMP 10, 41-45-ös jelei a „1000 (m)arhát csíkoz” fogalommal azonosítható. A csíkozásról viszont megállapítottuk, hogy területszámításra használták. Az általa átírt számsorok ezt az értéket is tartalmazzák:

	1	8	setat		
	2	1	thousand-of-land	6	setat
	4	3	„ „	2	„
/	8	6	„ „	4	„ .

3. Egyébként jól látja elméletének árnyoldalát is, jelezve, hogy: „…which is impossible if one is in long and the other in square measure.”[9] Összegezve megállapíthatjuk, hogy Peet is teljes példát keres ebben a feladatban, hasonlítások alapján választ kívánt adni a *tizedeléses* írásmódra, területegységeket vél felfedezni a használt számok mögött, viszont belátja, hogy ezek szorzata a negyedik hatványhoz vezetne. Szokásához híven kísérletet tesz ennek magyarázatára is, és ezt abban látja, hogy az ősi Egyiptomban szorzás helyett csupán összeadtak. Ezzel a problémát csak megkerülte, de nem oldotta meg. Ebben a levezetésben

[3] A 64/81 az a tört, amely, ha az átmérőt 1-nek tekintjük, a kör területét fejezi ki.
[4] Peet, *The Rhind Mathematical Papyrus*, British Museum 10057 and 10058, (London,1923).
[5] Peet, *op.cit*., 88, No. 48.
[6] ‘Tisztán látható az összehasonlítás egy kilenc *khet* oldalú négyszög és egy kilenc *khet* átmérőjű kör területe között.’
[7] ‘Mindegyik csíkot egy könyökterületnek neveztek, mert a *khet* négyzet egy oldala mentén egy könyöknek mérhető, és ennek az ezerszerese, lásd leírva: xxxxx „ezer föld-egység”, 10 négyzet *khet* nagyságot jelentene,…’
[8] Borbola, *op.cit*.
[9] ‘ ami lehetetlen, ha az egyik hossz-, a másik területméret.’

sehol sincs utalás mértékegységre! Legnagyobb hibája, hogy nem ismerte fel az egyiptomi π számolásának jelenlétét.

4. Chace[10] szintén a 48-as feladattal foglalkozik. Szerinte a *setat* egység azonos az ősi egyiptomi ’thousand-of-land’-dal. Véleménye nagyjából azonos E.T. Peetével. Érdekességképpen megjegyezzük, hogy az Y_1 jel transzliterációjaként nem a szokásos *mḏ3t* átírást adja, hanem az összegre utaló *dmd*-t. Itt komolyan téved.
5. Példánk legfrissebb feldolgozása Gay Robins és Charles Shute [11] tollából származik. Két nagyvonalú mondatban elintézik ezt a feladatot. Mondanivalójuk azonos a Peet-féle variánssal.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az RMP 48-as feladatát az érvényben lévő hivatalos magyarázat teljes példának tekinti, melyben a közölt ábra, a kör és a köré képezett négyzet területi összefüggését példázza. Véleményük szerint mértékegységekkel (hossz és terület) is számolnunk kell, erre alapozták a hieratikus számok eltérő írásmódját.

C. Észrevételeink

Megítélésünk szerint a szakirodalom nem ismerte fel, illetve nem kereste a feladat lényegét, de az is lehet, hogy az egyébként már Eisenlohr tollából ismert $A_{kör} = \left(d\frac{8}{9}\right)^2$ képlet túl messzire vezette volna őket. Az RMP példái között valóban nem szerepel a kétszeri 8/9-delés. Ez csak az MMP 10. feladatában látható, ott viszont a szakirodalom még nem ismerte fel a d²-et. További szarvashibának tekintjük a mindenkori mértékegység bevezetésére tett görcsös erőfeszítésést. Sem az ábra, sem a közölt számok nem tartalmaznak ezirányú adatokat. Csupán feltételezésekről van szó, melyeket az idők folyamán mindenki tényként fogadott el. A továbbiakban a számolás menetére a tartalmát tekintve senki sem tért ki, úgy is mondhatnánk, hogy csupán mechanikus elemzést nyújtottak. A példa értelmét eddig senki sem tárgyalta.
A következőkben erre teszünk kísérletet.

D. A példa tárgyalása

Először vizsgáljuk meg a tényeket. A négyszög jelenléte vitán felül áll. A benne foglalt szabálytalan hétszög területének számítását elvethetjük, mert az ábra alatt közölt számítás nem erre utal. Tényként fogadhatjuk el, hogy a belső durva rajz valójában nyolcszögnek indult, ami egyúttal a kör számolásához vezet. Mindezt Vogel és Gillings levezetésére is alapozzuk.[12] Az ábrában tisztán olvasható 9-es szám mellett nem áll mértékegység, így ezt pusztán számnak tekintjük. Ha lenne mértékegység mellette – lásd az 50-es feladatot –, akkor az lehetne a négyzet egyik oldala, illetve ugyanabban a mértékegységben a belerajzolt kör átmérője is. Erre utalna az alatta lévő két számoszlop. A 9 egység átmérőjű kör területe 64, a 9 egység oldalú négyzet területe 81. (Mindkét eredmény esetében gondolatban hozzá kellene tennünk, hogy egység négyzet.) De mértékegységgel egyszerűen nem találkozunk.

A tényeket vizsgálva érdemes nyomatékosan tudatosítani, hogy a kör területének számítására itt egyáltalán nincs utalás! Nem írja le a szokásos menetet: 9-1= 8; 8 × 8 = 64. A 8-as szorzótábla így a levegőből pottyant ide, ezen az alapon jelenléte értelmetlen. Sőt! Az RMP körrel foglalkozó feladataiban sehol sem látható a 9 × 9 = 81 művelet. (Ez lenne a d².)

---

[10] Chace, *op. cit.*

[11] Robins and Shute, *The Rhind Mathematical Papyrus,* Published for the Trustees of the British Museum by British Museum Press (London, 1987). Reprinted (1990,1998).

[12] Lásd a Függelék XIII-as tábláját.

Ezek alapján joggal feltételezhetjük, hogy a két számoszlop eredménye nem a felsorolt ábrák területére vonatkozik, ezért nem kell mértékegységet mellé utalni, viszont számszerinti értékük azzal egybeesik. Megállapíthatjuk, hogy írnokunknak más célja volt ábrájával és a közölt levezetésekkel.

Feltevésünk szerint *a négyzet és a kör területe közötti viszonyszámot határozta* meg. Így számolhatott: $81 \times 64/81 = 64$. Ez volt az a varázsszám, amit ma négyszeres formájában π-ként ismerünk. (A $(8/9)^2 = 64/81$, mint azt már korábban láttuk, a 3,1605-ös π értékhez vezet: $4 \times 64/81 = 256/81 = 3{,}1605$.)

Az ábrában szereplő 9-es szám, mint arra már utaltunk, pusztán számnak tekinthető, így a kör állandójára, a 9-es kezdésre utal. (Lásd még a RMP 43-as feladatát.)

Mi is megállapítjuk, hogy a hieratikus számoszlopok a tízzel osztás jeleit viselik magukon. A jobb oldali oszlopokban, ahol a szorzó kétszerezése történik nincs *tizedelés*. Itt az írnok a négyet és a nyolcat az ’*n*’ hieratikus jelből levezetve vízszintes vonalakkal írta. A szorzandót és az alatta következő szorzatokat (valójában összeadásokat) viszont tízzel osztva írta le. Utalunk itt a többi között az első oszlopra, ahol a 16 helyett csak 1 (+) 6, a 32 helyett 3 (+) 2 és a 64 is 6 (+) 4 formában jelentkezik. Ezeket a számokat egyébként szabályosan, függőleges vonalakkal írta, így a 2 = II; a 3 = III; a 4 helyén a IIII és a többi között a 6 helyén a két sorba rendezett hármas pontok láthatók. Írnokunk ügyelt arra, hogy *tizedelése* esetén pontos adatokkal lásson el minket.

Miért tette ezt? Miért tízzel osztva írta számait? Mégis Peet és követői által a más példákból ide ’vetített’ „thousand-of-land”, azaz a *setat* mértékegység adná erre az okot? Nem, erre a fentiekben már részletesen kitértünk. Ebben a példában írnokunk nem jelölt meg mértékegységet, így hiba ezen az alapon a nyilvánvaló tízzel osztást magyarázni. Ellenpélda az MMP 10-es feladatában is alkalmazott 1 + 6 *tizedelős* írást, ahol a 16 nem lehet *setat* mértékű, nem beszélve arról, hogy a többi számot tanárunk ott már „jól” írta.

Elképzelésünk szerint a tizedesvessző tologatásának bevett szokását jóval egyszerűbb okokra
∩∩∩
vezethetjük vissza. *Egyszerűen könnyebb volt így írni*. A 10 = ∩; és a többi között a 70 = ∩∩∩∩, stb. Miért kínlódott volna a halmok jeleivel, ha *tízzel osztva* sokkal egyszerűbben leírhatta számait?[13]

Írásuk általános alapelve, a tömörség és takarékosság itt is érvényes.

Árpád Másána Született eszesünk ezt a példát megítélésünk szerint mellékletként kezelte, bemutatta a kör varázsszámát, a $(8/9)^2$-t az ábra és az alatta feltüntetett számoszlopok segítségével. Ezért nem írt szöveget mellé, ezért helyezte az egészet a számolási oldalra, és ezért nem szükséges, nem lehet mértékegységekkel ellátni ezt a viszonyszámot!

[13] Ezzel az írásmóddal bővebben foglalkozunk a „*Kör kulcsa és a magyar számsor*” című fejezetben.